

## 1.7. DZIAŁANIA NA ZBIORACH

Zbiory oznaczamy dużymi literami: A, B, C,...
$a \in A$ - czytamy $a$ należy do zbioru $A$ ( $a$ jest elementem zbioru $A$ ) $a \notin A$ - czytamy $a$ nie należy do zbioru $A$ ( $a$ nie jest elementem zbioru $A$ )
<u>zbiór skończony</u> – ma skończoną liczbę elementów <u>zbiór nieskończony</u> – ma nie skończoną liczbę elementów
<u>zbiór pusty</u> $\emptyset$ - zbiór , do którego nie należy żaden element
<u>moc zbioru</u> $\overset{=}{ }A$ - liczba elementów zbioru $A$

Przykład 1.7.1. Wypisz elementy zbioru:

a)  $A = \{x \in C : -2 < x \leq 5\}$ .

Rozwiązanie	Komentarz
$A = \{x \in C : -2 < x \leq 5\} = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$	Do zbioru $A$ należą wszystkie liczby całkowite większe od $-2$ i nie większe od $5$ .

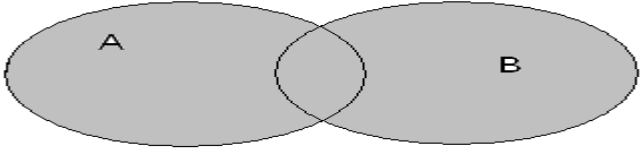
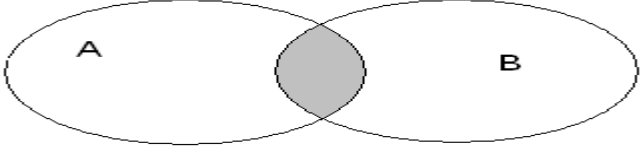
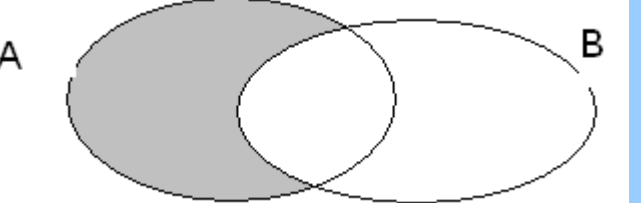
b)  $B = \{x \in N : x \text{ jest wielokrotnością } 3\}$

Rozwiązanie	Komentarz
$B = \{x \in N : x \text{ jest wielokrotnością } 3\}$ $= \{3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$	Do zbioru $B$ należą wszystkie liczby naturalne, które są wielokrotnościami liczby $3$ .  Zbiór $B$ jest zbiorem nieskończonym , nie możemy wypisać wszystkich elementów tego zbioru. Zbiór $B$ nie ma elementu największego.

c)  $D = \{x \in C_- : x > 5\}$

Rozwiązanie	Komentarz
$D = \{x \in C_- : x > 5\} = \emptyset$	Żadna liczba całkowite ujemna nie jest większa od $5$ . Zbiór $D$ jest zbiorem pustym.

## Działania na zbiorach

Działanie	Ilustracja graficzna	Zapis symboliczny	Niektóre własności
Suma zbiorów $A \cup B$		$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$	$A \cup \emptyset = A$
Iloczyn zbiorów $A \cap B$		$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
Różnica zbiorów $A \setminus B$		$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$	$\emptyset \setminus A = \emptyset$ $A \setminus \emptyset = A$

**Przykład 1.7.2.** Wykonaj działania  $A \cup B$ ;  $A \cap B$ ;  $A \setminus B$ ;  $B \setminus A$  dla zbiorów:

$$A = \{1, 2, 4, 5\} \quad B = \{-6, -3, -2, 0, 1\}$$

Rozwiązanie	Komentarz
$A \cup B = \{-6, -3, -2, 0, 1, 2, 4, 5\}$	Do sumy $A \cup B$ należą <u>wszystkie</u> elementy zbiorów $A, B$ .
$A \cap B = \{1\}$	Iloczynem $A \cap B$ jest <u>część wspólna</u> zbiorów $A, B$ .
$A \setminus B = \{2, 4, 5\}$	Różnicą $A \setminus B$ są elementy, które <u>należą do zbioru <math>A</math> i nie należą do zbioru <math>B</math></u> .
$B \setminus A = \{-6, -3, -2, 0\}$	Różnicą $B \setminus A$ są elementy, które <u>należą do zbioru <math>B</math> i nie należą do zbioru <math>A</math></u> .

Przykład 1.7.3. Dane są zbiory

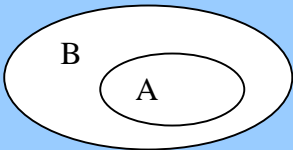
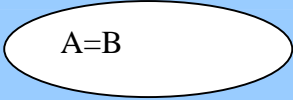
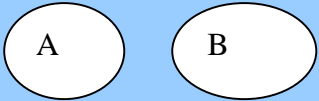
$$A = \{x \in R : x^2 - 81 = 0\}$$

$$B = \{x \in C : x > 2\}$$

$$D = \{x \in N : x \leq 9\}$$

Wyznacz zbiór  $(D \cap B) / A$

Rozwiązanie	Komentarz
$A = \{x \in R : x^2 - 81 = 0\} = \{-9, 9\}$	Wypisujemy elementy zbioru $A$ .
$B = \{x \in C : x > 2\} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}$	Wypisujemy elementy zbioru $B$ . Zbiór $B$ jest nieskończony.
$D = \{x \in N : x \leq 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$	Wypisujemy elementy zbioru $D$ .
$D \cap B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $(D \cap B) / A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	Wykonując działania złożone pamiętamy o kolejności wykonywania działań. Wykonujemy działanie w nawiasie. Wykonujemy działanie $(D \cap B) / A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \setminus \{-9, 9\}$ .

Relacje między zbiorami			
Relacja	Definicja	Ilustracja graficzna	Zapis symboliczny
<u>Zawieranie się zbiorów</u> $A \subset B$	Zbiór $A$ zawiera się w zbiorze $B \Leftrightarrow$ każdy element zbioru $A$ jest elementem zbioru $B$ (Zbiór $A$ jest <u>podzbiorem</u> zbioru $B$ , a zbiór $B$ jest <u>nadzbiorem</u> zbioru $A$ ) $A \not\subset B$ - $A$ nie zawiera się w $B$		$A \subset B \Leftrightarrow$ dla każdego $x$ $(x \in A \Rightarrow x \in B)$
<u>Równość zbiorów</u> $A = B$	Zbiory $A$ i $B$ są <u>równe</u> $\Leftrightarrow$ mają te same elementy		$A = B \Leftrightarrow$ dla każdego $x$ $(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
<u>Zbiory rozłączne</u>	Zbiory $A$ i $B$ są <u>rozłączne</u> $\Leftrightarrow$ iloczyn tych zbiorów jest zbiorem pustym		$A \cap B = \emptyset$

Przykład 1.7.4. Za pomocą diagramów przedstaw związki między zbiorami  $C, W_-, N$ .

Rozwiązanie	Komentarz
<p>The diagram shows three sets represented by circles. A large black circle labeled 'C' contains a smaller blue circle labeled 'N'. To the right, a red circle labeled 'W<sub>-</sub>' overlaps with the right side of circle 'C'.</p>	<p>Każde koło przedstawia odpowiedni zbiór  <math>C</math> – zbiór liczb całkowitych  <math>W_-</math> – zbiór liczb wymiernych ujemnych  <math>N</math> – zbiór liczb naturalnych</p>

Przykład 1.7.5. Dane są zbiory

$$A = \{x \in N : x \leq 6\}; B = \{x \in C : -4 < x < 4\}; D = \{x \in N : 4 \leq x < 7\}.$$

Wypisz elementy zbiorów  $A, B, C$ , a następnie wśród poniższych zdań wskaż prawdziwe:

- a)  $D \subset A$                       b)  $D \subset B$                       c)  $(B \cap D) \subset A$   
d) zbiory  $B$  i  $D$  są rozłączne.

Rozwiązanie	Komentarz
$A = \{x \in N : x \leq 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	Wypisujemy elementy zbioru $A$ .
$B = \{x \in C : -4 < x < 4\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$	Wypisujemy elementy zbioru $B$ .
$D = \{x \in N : 3 \leq x < 7\} = \{3, 4, 5, 6\}$	Wypisujemy elementy zbioru $D$ .
a) $D \subset A$ - zdania prawdziwe	Każdy element zbioru $D$ jest też elementem zbioru $A$
b) $D \subset B$ - zdanie nie jest prawdziwe	Do zbioru $B$ nie należą 4, 5, 6.
c) $(B \cap D) = \{3\}$ $(B \cap D) \subset A$ - zdania prawdziwe	3 jest też elementem zbioru $A$
d) zbiory $B$ i $D$ są rozłączne - zdanie nie jest prawdziwe	Zbiór $(B \cap D) = \{3\}$ nie jest zbiorem pustym.

Przykład 1.7.6. Czy zbiory  $A = \{x \in N : x^2 = 9\}$   $B = \{x \in R : x^3 = 8\}$  są równe?

Rozwiązanie	Komentarz
$A = \{x \in N : x^2 = 9\} = \{3\}$	Wypisujemy elementy zbioru $A$ .
$B = \{x \in R : x^3 = 8\} = \{2\}$	Wypisujemy elementy zbioru $B$ .
$A \neq B$	Zbiory $A$ i $B$ mają te same elementy.

## ĆWICZENIA

Ćwiczenie 1.7.1. (1pkt.) Wypisz elementy zbioru:  $A = \{x \in C_+ : 0 \leq x < 5\}$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi.	1

Ćwiczenie 1.7.2. (4pkt.) Dane są zbiory

$$A = \{x \in N : -1 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x \in C : x > 1\}$$

$$D = \{x \in R : 2x - 5 = 3x - 4\}$$

Wyznacz zbiór  $(A/B) \cup D$

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Wypisanie elementów zbioru A	1
2	Wypisanie elementów zbioru B	1
3	Wypisanie elementów zbioru D	1
4	Podanie elementów zbioru $(A/B) \cup D$	1

Ćwiczenie 1.7.3. (1pkt.) Które ze zbiorów  $\{0\}, C_+, W_+$  są podzbiorem zbioru  $N$ .

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi.	1

Ćwiczenie 1.7.4. (1pkt.)  $A$  jest zbiorem liczb podzielnych przez 2.  $B$  jest zbiorem liczb podzielnych przez 5. Czy zbiory  $A$  i  $B$  są rozłączne?

### schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie odpowiedzi z uzasadnieniem.	1